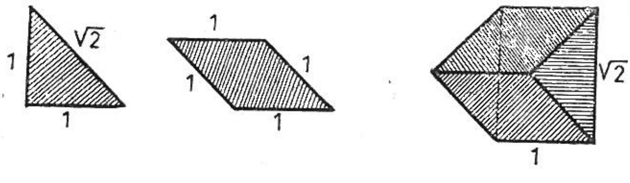
lista) la creación matemática es algo así como un juego en el que se suponen dados ciertos elementos (símbolos), así como ciertas reglas de juego que los relacionan (leyes formales), con las cuales le basta al matemático para crear, jugando con ellas y cuidando de no transgredirlas. El contenido conceptual de tales símbolos y de tales relaciones es algo que el matemático formalista puro deja a un lado. Mientras no llegue a dos jugadas contradictorias el juego es válido y la estructura teórica edificada sobre este juego tiene toda la firmeza y estabilidad derivada de la no contradictoriedad de sus leyes formales fundamentales.

Presentamos a continuación tres ejemplos de auténticos juegos que van a ofrecernos considerable riqueza de estructuras matemáticas, y empezaremos concretamente con un juego mosaico, es decir, con un juego no catalogado precisamente entre los de competición, sino entre los constructivos, con lo que nos brinda otro ejemplo de material educativo multivalente [1].

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS EN UN JUEGO MOSAICO [2]

Material: Una o dos cajas de mosaicos de colores, con piezas de dos clases; triángulos rectángulos isósceles iguales entre sí y rombos con ángulos agudos de 45° y lados iguales a los catetos de los triángulos. Estos mosaicos de juguete se venden en los bazares con el nombre de «Rombo». La inconmensurabilidad de las áreas de estas piezas me sugirió una lección activa sobre irracionales cuadráticos y su cálculo, que conduje del siguiente modo:



Empecé distribuyendo entre los alumnos (de 3.° y 4.° de Bachillerato) piezas de las dos clases, y preguntándoles los valores de sus ángulos, el

[1] En nuestro librito sobre «Didáctica matemática eurística» hacemos también uso del juguete llamado «Bolaoá», clasificado entre los de destreza, para urdir una divertida lección sobre parábolas y trinomio de segundo grado.

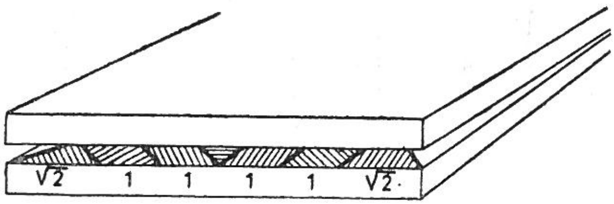
[2] Artículo del autor publicado en la revista belga «Mathematica & Pedagogica, núm. 10, 1956-57.

de la hipotenusa del triángulo (tomando el cateto como unidad); y el del área de una y otra pieza. No es raro que la del rombo ofrezca alguna pequeña dificultad. Se puede ayudar a resolverla componiendo la figura adjunta o dejando simplemente que averigüen la altura del rombo por aplicación del teorema de Pitágoras.

Resultados: Area del triángulo, $1/2$; área del rombo, $\sqrt{2}/2$.

Los escribo en el encerado y propongo la siguiente cuestión: «Con estas piezas del mosaico se pueden construir multitud de figuras diversas. Si formamos, aparte, figuras sólo con triángulos y figuras que solamente contengan rombos, ¿será alguna de las primeras equivalente a alguna de las segundas? De otro modo: ¿Se puede sustituir un número de triángulos por un número de rombos de modo que las áreas sustituídas sean equivalentes?»

Los alumnos con los que operé ya sabían por aritmética la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$. Tuve, sin embargo, que recordar su significado: Imposibilidad de que $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ o, de otro modo, imposibilidad de que $n\sqrt{2}$ sea igual a m unidades (m, n enteros). Con este recuerdo, conseguí ya que, algunos de los alumnos, vieran la imposibilidad análoga de que un cierto



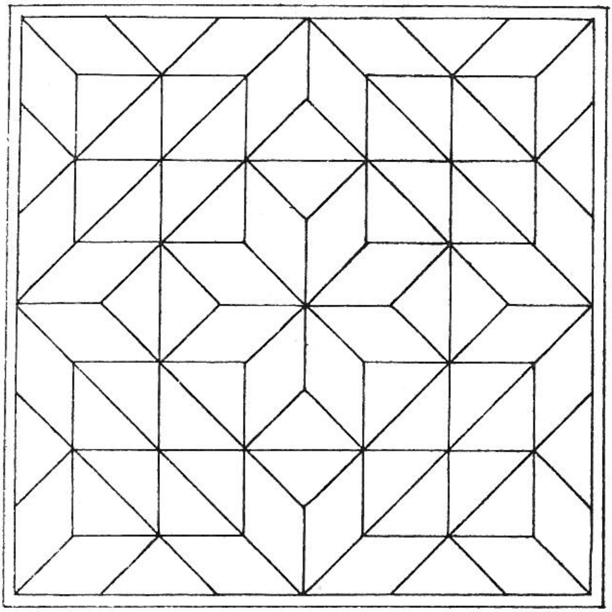
número de veces $\sqrt{2}/2$, área del rombo, equivalga a otro cierto número de veces el área del triángulo $1/2$. Recalqué, diciendo: «Las áreas de los triángulos y las de los rombos son como dos mundos aparte no intercambiables. Toda figura compuesta de triángulos y de rombos tendrá un área con una parte racional procedente solamente de los triángulos que contiene y una parte irracional, procedente de los rombos.»

Después de llegar a esta consecuencia, abro ligeramente una de las cajas cuadradas del juego con objeto de dejarles ver solamente un borde. En él ven la constitución de uno de los lados del cuadrado, cuya longitud consta de cuatro lados de rombos (1) y dos hipotenusas de triángulos ($\sqrt{2}$) e inmediatamente les propongo averiguar cuántas piezas de cada clase contiene la caja, es decir, hay en el cuadrado.

Tras breve reflexión calculan el cuadrado de $4 + 2\sqrt{2}$

$$(4 + 2\sqrt{2})^2 = 16 + 4 . 2 + 2 . 8 . \sqrt{2} = 24 + 16\sqrt{2}$$

de lo que resulta que la caja contiene 48 triángulos y 32 rombos.



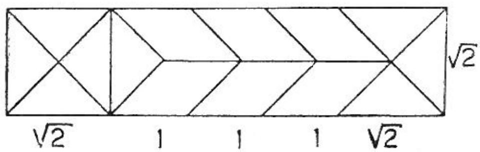
Repito la cuestión para cajas de distintos tamaños y aun para rectángulos que los mismos alumnos pueden idear. Por ejemplo, el rectángulo de dimensiones $3 + 2\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$ exige 14 triángulos y 10 rombos, como se obtiene fácilmente calculando el producto

$$(3 + 2\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 3 + 2 . 2 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 7 + 5\sqrt{2}$$

El cálculo previo del número de piezas necesarias de una y otra clase facilita mucho la construcción efectiva, con la que puede terminar en forma de juego instructivo la lección.

NOTA I.—Es preciso que los rectángulos propuestos sean efectivamente de posible construcción; lo son efecto, excepto aquellos que tienen una dimensión racional, y la otra irracional. Es fácil ver que la irracionalidad en una dimensión exige el empleo de triángulos rectángulos (la $\sqrt{2}$ sólo procede de hipotenusas), lo que implica la aparición de otra dimensión irracional (su mitad) en la dirección perpendicular.

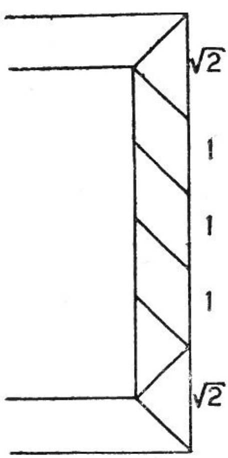
Pero, demostremos que esta condición es suficiente. La construcción efectiva de los rectángulos con dos dimensiones racionales es inmediata,



así como la de los rectángulos de dimensiones de la forma $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$ (a, b, enteros). Tanto unos como otros, no exigen más que el empleo de triángulos.

La construcción de rectángulos de dimensiones de la forma $m + n\sqrt{2}$ y $p\sqrt{2}$ puede reducirse a la de p bandas de dimensiones $m + n\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$, que pueden obtenerse por medio de $2m$ rombos y $4n$ triángulos cada una, como muestra la figura en el caso particular $(3 + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$, fácil de generalizar.

Para estudiar el caso general $(m + n\sqrt{2})(m' + n'\sqrt{2})$ analicemos, ante todo, la construcción de un cuadrado de lado $m + n\sqrt{2}$. Colocando, contigua a cada uno de sus lados, y hacia el interior, una banda trapezoidal de altura $\sqrt{2}/2$, formada de m rombos y de $2n - 1$ triángulos, el problema se reduce a la construcción del cuadrado de lado $m + (n - 1)\sqrt{2}$. Una nueva banda de m rombos y de $2n - 3$ triángulos reducirá el lado del cuadrado central a $m + (n - 2)\sqrt{2}$, y así sucesivamente, llegaremos a dejar en el centro la construcción de un cuadrado de lado m, constructible mediante $2m^2$ triángulos. Es fácil comprobar que el número total de triángulos y de rombos utilizados en esta construcción es respectivamente $2m^2 + 4n^2$ y $4mn$, lo que corresponde al cálculo algebraico previamente efectuado.



La misma técnica permite construir todos los rectángulos de la forma

$$(m + n\sqrt{2})\,(m' + n\sqrt{2})$$

dejando en el centro el rectángulo mm' orlado con n bandas.

El caso general $(m + n\sqrt{2})\,(m' + n'\sqrt{2})$ en el que $n' = n + p$ puede reducirse a los precedentes mediante la descomposición en dos rectángulos como sigue:

$$(m + n\sqrt{2})\,(m' + n'\sqrt{2}) =$$
$$(m + n\sqrt{2})\,(m' + n\sqrt{2}) + (m + n\sqrt{2})\,.\,p\sqrt{2}$$

Un estudio semejante puede ser hecho para figuras con forma de rombo, trapecio o más complicadas. No es de esperar que los alumnos de la edad indicada descubran los procedimientos deductivos de construcción expuestos. En general, aciertan después de reiterados tanteos.

NOTA II.—Los lados y las áreas de los triángulos estudiados, constituyen un ejemplo simpático de lo que en Algebra moderna se llama anillo de integridad, salvo interpretación de elementos negativos que podrían realizarse por medio de piezas en negro. Si se efectúa, en efecto, las construcciones sobre fondo negro, la superposición de piezas negras produce el mismo efecto visual que la supresión de la figura cubierta.

Pero entonces, la posibilidad de las construcciones se complica.

ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS EN UN JUEGO SOLITARIO [3]

1. En esta nota me propongo ilustrar cómo la consideración de ideas de simetría y dualidad, permite guiar la solución de un juego solitario, bastante difundido y de cierta dificultad cuando se intenta resolverlo sin una conducción racional de su estrategia. Este juego se expende en el comercio con el absurdo nombre de «Cha-cha-chá».

2. El juguete consta de una placa con 33 orificios dispuestos en estructura de cruz, como indica la figura, a los que se ajustan otras tantas fichas o peones.

Suprimida la ficha del orificio central, el juego consiste en eliminar fichas saltando sobre ellas con otras en las cuatro direcciones, que llama-

[3] Estudio publicado en «Gaceta Matemática», 1.ª serie, tomo IX, núm. 1.