CAPÍTULO 2: LA CONQUISTA DE LOS NÚMEROS

La conquista de los números

Uno de los personajes que tuvo más repercusión en la introducción del sistema decimal en Europa fue Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci. En los viajes por el norte de África que hizo con su padre, alrededor del año 1202, observó las cifras usadas por los comerciantes árabes. A su regreso escribió *Liber Abaci*, un libro donde explicaba la forma de utilizar aquellas cifras. También introduce el uso del cero, lo que según algunos historiadores es la primera mención del número en un libro europeo. Asimismo, parece que fue la primera vez en la que se expresaron las fracciones utilizando una línea para separar el numerador del denominador.

Además, fue pionero en otra cuestión: introdujo un capítulo en el que explicaban los secretos de *ciertas adivinaciones*, como él mismo denominó a los trucos de algunos juegos de magia, en concreto, juegos basados en matemáticas (lo que se conoce como *matemagia*).

El libro introduce también métodos para comprobar que ciertas operaciones realizadas son correctas, aplicando lo que hoy llamaríamos aritmética modular, en concreto, *clases de resto módulo 9*.

En la aritmética modular los elementos son, en lugar de los números enteros, *clases* de números de resto módulo N. ¿Esto qué significa? Empecemos por escoger un número entero cualquiera, por ejemplo, el 9. Al dividir cualquier otro número entero *m* entre 9 obtendremos un cociente *c* y un resto *r*, que cumplen m = c. N + r. Por ejemplo, al dividir 12 entre 9, tenemos: 12 = 1. 9 + 3. Al dividir 21 entre 9, tenemos 21 = 2.9 +3.

Ahora, decimos que dos elementos son iguales "módulo N" (o pertenecen a la misma clase de resto módulo N), si al dividirlos por N, el resto obtenido es el mismo. De esta manera, 21 y 12 son iguales módulo 9 o, lo que es lo mismo, pertenecen a la misma clase de resto módulo 9. Solo hay 9 clases diferentes módulo 9, ya que al dividir por 9 solo se pueden obtener los siguientes restos: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} Cualquier otro número será igual módulo 9 a uno de los anteriores. En concreto, el 9 y todos sus múltiplos son equivalentes al cero.

Una de las consecuencias de utilizar el sistema decimal es que el resto módulo 9 se puede obtener de una forma muy sencilla: simplemente hay que sumar las cifras del número y volver a repetir el proceso en caso de que la suma sea mayor que 8.

En el ejemplo del 34 tenemos el resultado: 3+4=7, y, efectivamente, 34 mod 9 es 7.

Si tomamos, por ejemplo, 993 tendríamos 9+9+3=21 y de aquí 2+1=3, y, efectivamente, 993 mod 9 es 3.

Cómo comprobar si un cálculo es correcto. La regla del 9

Esta regla fue de gran utilidad antes del uso de las calculadoras, cuando se realizaban operaciones a mano y surgía la necesidad de comprobar si dichas operaciones estaban bien realizadas.

- Regla de la multiplicación

  Es posible ver si una multiplicación de dos números A, B es correcta: ¿$A \times B = C$? Por ejemplo, ¿$1\,486 \times 656 = 974\,816$?

  Se obtienen los módulos 9 de los tres números A, B y C:

  $$a = A \bmod 9, \quad b = B \bmod 9, \quad c = C \bmod 9$$

  En el ejemplo, $1486 \bmod 9 = 1$, $656 \bmod 9 = 8$, $974\,816 \bmod 9 = 8$

  Multiplicamos a, b y calculamos el módulo 9: $n = (a \times b) \bmod 9$

  En nuestro caso, $\mathrm{n} = 8$.

  Si $c \neq n$ significará que la operación no está bien realizada. Es importante señalar que el hecho de que la igualdad $c = n$ se cumpla, no implica que la solución sea correcta, pero sí podemos utilizar la regla para encontrar algunos resultados erróneos. No es una regla infalible, pero nos ayuda a decir que la probabilidad de que esté bien hecha la operación es alta.

  Por supuesto la regla también funciona para comprobar multiplicaciones de más de dos números.

- Regla de la resta

  También se puede comprobar si una resta es correcta: ¿$A - B = C$?

  Se obtienen los módulos 9 de los tres números A, B y C:

  $$a = A \bmod 9, \quad b = B \bmod 9, \quad c = C \bmod 9$$

  Se suma a más c y calculamos el módulo 9: $n = (a + c) \bmod 9$

  Si $n \neq b$ significará que el resultado obtenido no es correcto. Hay que tener cuidado, porque en el caso de la resta podemos obtener que $n = 0$, y es importante saber que cuando se trabaja módulo 9, como ya dijimos anteriormente, el 0 y el 9 son equivalentes.

- Regla de la suma

  Veamos un ejemplo con una suma de más de dos sumandos, aunque se podría realizar esta suma con cualquier cantidad de términos: ¿$A + B + C = D$?

  Obtenemos los módulos 9 de los cuatro números A, B, C y D:

  $$a = A \bmod 9, \quad b = B \bmod 9, \quad c = C \bmod 9, \quad d = D \bmod 9$$

  Sumamos a más b más c y calculamos el módulo 9: $n = (a + b + c) \bmod 9$

  Si $n \neq d$ significará que el resultado de la operación no es correcto.

Matemagia basadas en las propiedades del número 9

Un caso particular de las reglas anteriores es el criterio para saber si un número es divisible entre 9. Lo será cuando la suma de sus dígitos sea 9 o múltiplo de 9 (que, recordemos, es equivalente a 0, que es el resto que se obtiene cuando la división es exacta entre 9).

Esta propiedad nos va a permitir hacer algunos juegos de magia sencillos pero asombrosos, al estilo de los que cuenta Fibonacci en su libro.

Adivinar el número pensado:

En concreto, si sé que un número total es un múltiplo de 9, sabiendo todas sus cifras menos una puedo adivinar la que falta (diferente de 0), que será la que haga que la suma total sea 9. Puedo pedir a un espectador que escoja cualquiera de las cifras, sin decirla (imaginemos que escoge el 4). A continuación, le pido que enuncie en voz alta el resto de cifras del número, en cualquier orden: 1, 1, 3. Las voy sumando mentalmente (obtengo 5). En total, la suma de las cifras deben ser 9 o un múltiplo de 9, por lo que la cifra que falta es el 4.

¿Y cómo consigo que el número inicial sea un múltiplo de 9? Hay varias formas de conseguirlo, pero vamos a contar una de las más sencillas:

Pide a un espectador que escriba un número cualquiera de 10 cifras (podría ser cualquier cantidad de cifras en realidad, pero 10 da sensación de dificultad sin hacerlo demasiado largo).

Ahora pídele que escriba otro número, con las mismas cifras del inicial pero en otro orden, y que reste ambos números, teniendo cuidado de restar el menor al mayor, para no tener números negativos.

Por ejemplo, el espectador podría haber escrito el número:

9876543222

Ahora escribe el segundo número:

2789234526

Que tiene las mismas cifras en distinto orden. Ahora resta ambas cantidades y obtiene:

9876543222 – 2789234526 = 7087308696

Este último resultado, 7087308696, será un número múltiplo de 9. Una forma de comprobarlo es aplicar el mismo criterio sobre la prueba del 9 para la resta que explicamos al principio de estas páginas: tanto el minuendo como el sustraendo darán el mismo valor, luego la resta de ambos dará 0, que equivale a 9.

Así, si el espectador piensa cualquier cifra del número total 7087308696, por ejemplo el 7 inicial, y me dice las restantes, tendré que:

$$0+8+7+3+0+8+6+9+6=47 \gg 4+7=11 \gg 1+1=2$$

Y de aquí puedo deducir que si el resultado de sumar las cifras es 2, me faltan 7 unidades hasta el siguiente múltiplo de 9, luego la cifra pensada por el espectador y que no me dijo fue un **7**. Si te fijas realmente ese 7 también sería lo que necesito hasta el siguiente múltiplo de 9 si hubiese parado de sumar cifras cuando obtuve el 47 o cuando obtuve el 11 en el proceso de sumar cifras y repetir que realicé más arriba.

Por cierto, si recuerdas, al principio dijimos que el espectador no podría elegir un cero, porque si lo hace no sabríamos distinguir si eligió un 0 o un 9. De esta forma, si el resultado de nuestra suma del resto de cifras da un múltiplo de 9, sabremos que el espectador eligió un 9.

Otra forma de tener un múltiplo de 9, la numeración de los billetes:

Otro sitio en el que encontramos exclusivamente números que son múltiplos de 9 es en las numeraciones de los billetes de euro. Los billetes antiguos tienen un número de serie consistente en una letra seguida de once dígitos, mientras los nuevos tienen dos letras seguidas de diez dígitos. Estos números de serie, cambiando las letras por un número en concreto, siempre son múltiplos de 9. Esta característica se incluye para evitar falsificaciones es una forma de certificar que un número de serie es válido, pero a nosotros nos servirá para realizar nuestro juego de magia.

El valor de las letras en los billetes es el siguiente:

	A-2	B-3	C-4	D-5	E-6	F-7	G-8	H-9
I-10	J-11	K-12	L-13	M-14	N-15	O-16	P-17	Q-18
R-19	S-20	T-21	U-22	V-23	W-24	X-25	Y-26	Z-27

Aunque realmente no es necesario usar estos números, pues basta con emplear el módulo 9 de cada uno de ellos. Así se obtiene siempre un número de una cifra:

	A-2	B-3	C-4	D-5	E-6	F-7	G-8	H-9
I-1	J-2	K-3	L-4	M-5	N-6	O-7	P-8	Q-9
R-1	S-2	T-3	U-4	V-5	W-6	X-7	Y-8	Z-9

El truco:

El mago tendrá que elegir un espectador, le pedirá que saque un billete de su cartera y que vea el número de serie. El mago, mirando solamente un segundo el número, será capaz de memorizarlo. Para ello, le pedirá al espectador que vaya diciendo todos los caracteres del número de serie, despacio, pero saltándose uno cualquiera, a su propia elección. En el momento del salto de carácter se le pedirá que haga un ruido, para marcar que es ahí donde está el número a adivinar. En solo unos segundos el mago sabrá qué número es el que falta.

Sabiendo las características que hemos visto de los múltiplos de 9, la operación resultante es bastante sencilla, pues sólo tenemos que ver qué valor hace que la suma de todas las cifras sea 9.

Veamos un ejemplo:

Tenemos un billete con número de serie R B 0 1 9 2 3 8 3 0 1 5, que al cambiar el valor de las letras se queda en 1 3 0 1 9 2 3 8 3 0 1 5.

Si nuestro espectador piensa, por ejemplo, el 8, y nos dice las restantes:

$$1 + 3 + 0 + 1 + 9 + 2 + 3 + ? + 3 + 0 + 1 + 5 = 28$$

$$\rightarrow \quad 2 + 8 = 10 \quad \rightarrow \quad 1 + 0 = 1$$

De este resultado concluimos que la cifra que ha omitido nuestro espectador es el 8, ya que faltan 8 unidades hasta el siguiente múltiplo de 9.

Esperamos que te hayan gustado los trucos y que los pongas a prueba con tus amigos. Y no olvides practicar mucho el cálculo mental antes de presentarlos en público, para asombrar a tus espectadores como seguramente hacía en su día el gran matemático, y seguramente gran matemago, Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci.