REVOLUCIONES MATEMÁTICAS: EULER

Leonhard Euler fue capaz de deducir una fórmula que relaciona las caras, los vértices y las aristas de un poliedro convexo:

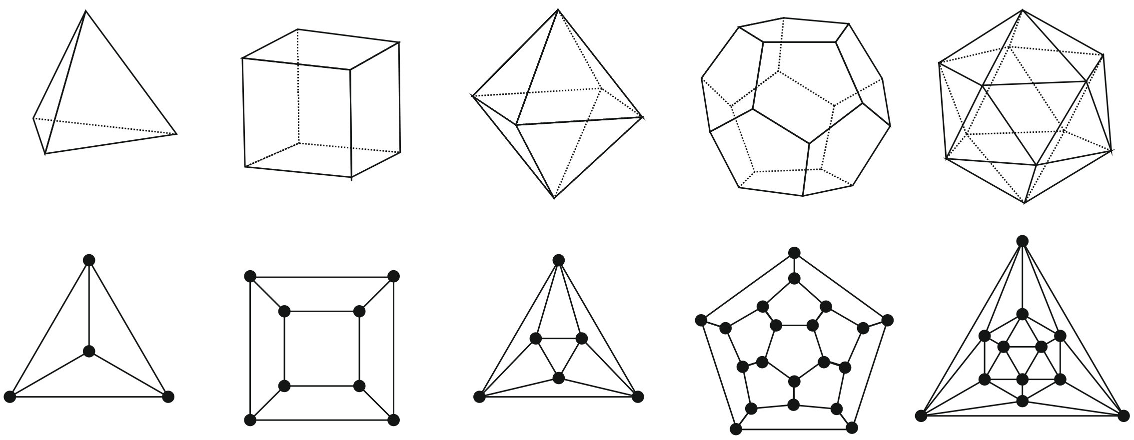
CARAS + VÉRTICES = ARISTAS + 2

Además, como cualquier poliedro convexo puede representarse como un *grafo*, esta fórmula también puede aplicarse a grafos planos.

Un grafo es una forma de representar un conjunto de elementos (que serán los vértices del grafo) con relaciones entre sí (las aristas, que son líneas que unen los vértices). Para transformar un poliedro en un grafo plano (o al revés), hacemos corresponder cada vértices de cada poliedro con un vértice del grafo, y las aristas del poliedro con aristas del grafo. De esta forma el grafo será una colección de puntos que están unidos entre sí por una línea o arista si, y solo sí, los vértices correspondientes en el poliedro original estaban unidos mediante aristas rectas. Las regiones del grafo plano resultante corresponden a todas las caras del poliedro menos una, , que podríamos decir que es la que inicialmente estaba "tocando la mesa". Generalmente asociamos a esta cara la región que queda fuera del grafo, es decir, todo lo que lo rodea. La fórmula de Euler queda, para los grafos:

REGIONES (incluyendo la que queda fuera del grafo) + VÉRTICES = ARISTAS + 2

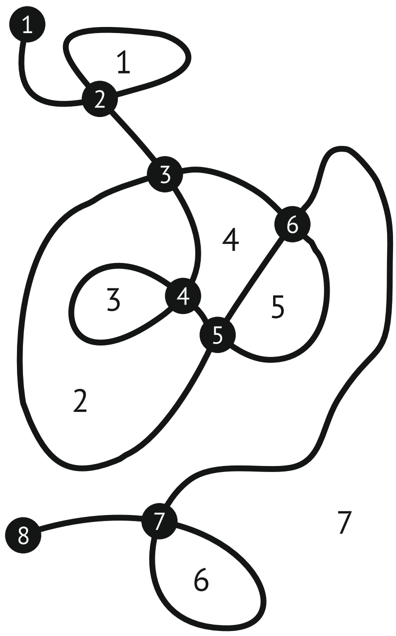
Veamos como ejemplo la representación como grafos de los cinco poliedros regulares:



Los garabatos de Euler

Podemos emplear la fórmula de Euler para grafos para ejecutar un sencillo truco de magia. Los pasos son los siguientes

1. Dibuja un garabato sin levantar el lápiz del papel (esta restricción no es necesaria para que se cumpla la fórmula de Euler, pero hará más fácil los conteos necesarios). La línea que dibujes se puede cortar consigo misma tantas veces como quieras. Señala el principio y el final de la línea.



2. Ahora, podemos hacer (empleando como *truco* la fórmula de Euler) una predicción:
   Regiones + Nodos = Aristas + 2
3. ¡Comprobemos que es así! Consideramos como nodos los puntos en los que la línea que has dibujado se corta consigo misma, añadiendo el comienzo y el final de la línea.
4. Cuenta las zonas en las que ha quedado dividido el papel, incluyendo la zona exterior. No te dejes ni un hueco. Esta será la cantidad de regiones o caras.
5. Ahora cuenta los segmentos en los que ha quedado dividida la línea que has trazado. No olvides el principio y el final de la línea. Esta será la cantidad de aristas.
6. ¿Se ha cumplido la predicción?

   En el dibujo: ¡7+8=13+2!

Entendiendo la fórmula de Euler

Pero ¿por qué funciona la fórmula de Euler? Para entenderlo, tenemos que introducir algunas definiciones:

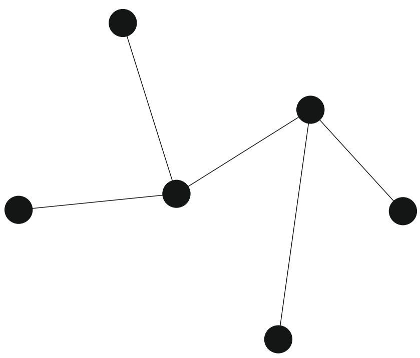
Camino de un grafo. Secuencia de vértices del grafo, tal que exista una arista entre cada vértice y el siguiente.

Camino simple. Camino en el que no se repite ningún vértice.

Ciclo de un grafo. Camino que empieza y acaba en el mismo vértice, sin repetir ningún vértice intermedio.

Grafo conexo. Un grafo es conexo si, tomando dos vértices cualesquiera, siempre hay un camino que los une.

Árbol. Grafo conexo en el que cualquier pareja de vértices está conectada por un único camino.



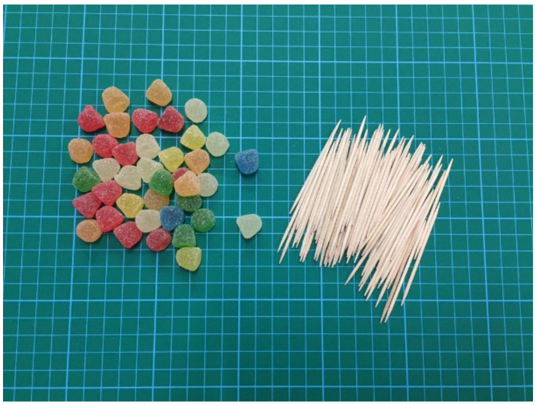
De esta forma un árbol cumple las siguientes condiciones:

- Es **conexo** y no tiene **ciclos**.
- Si añadimos una sola arista más, se forma un ciclo.
- Si quitamos una sola arista, hacemos que el grafo deje de ser conexo.
- Dos vértices cualesquiera están conectados por un único camino simple.

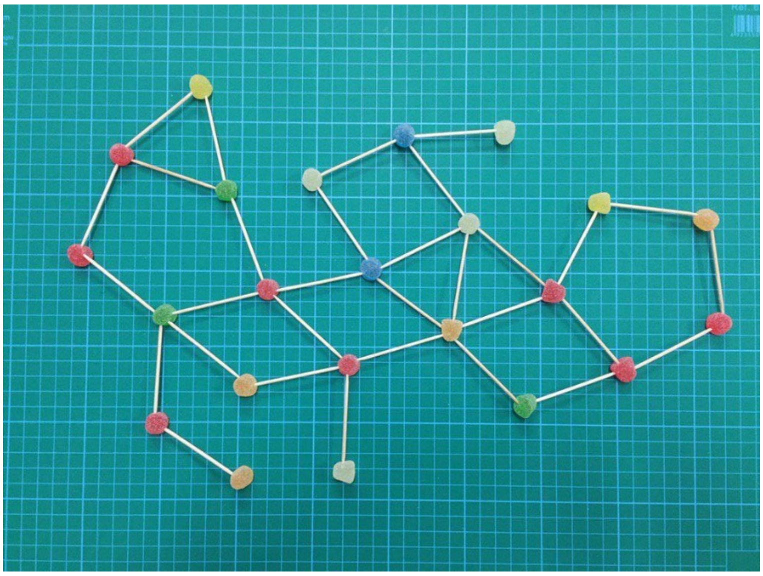
Volvamos a la fórmula de Euler.

Empecemos transformando cualquier grafo en un árbol.

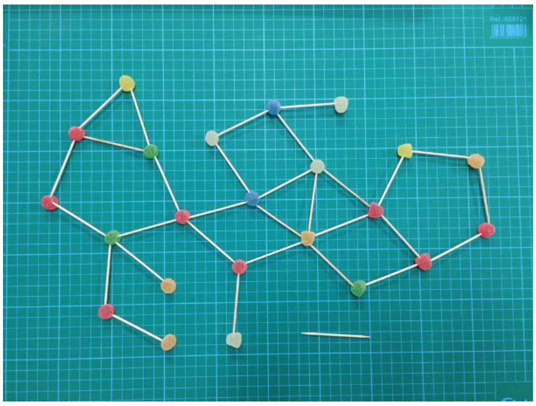
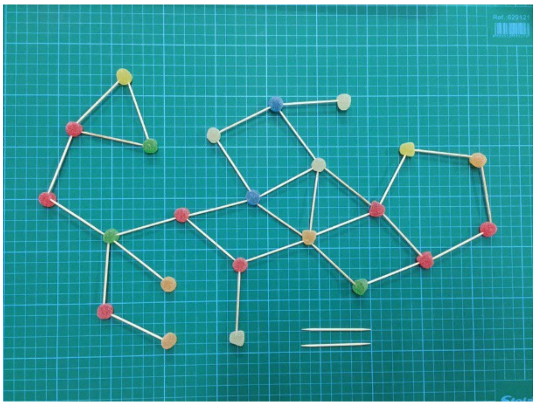
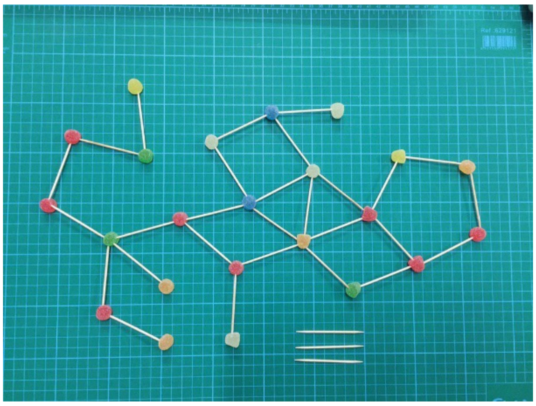
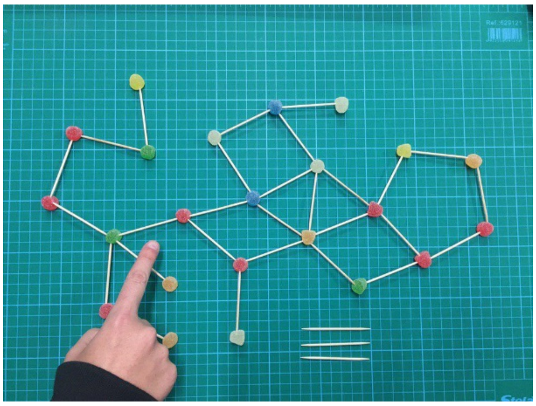
¡Veamos como hacerlo con nuestras propias manos! Lo único que necesitamos es utilizar algún tipo de material concreto para representar los vértices y las aristas. Por ejemplo, podemos utilizar gominolas para los vértices, y palillos para las aristas.



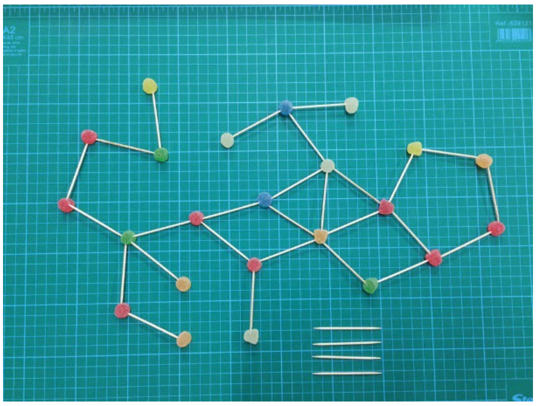
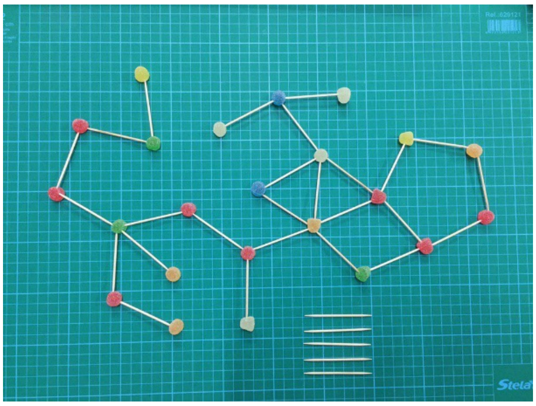
Primero construimos el grafo de partida, como queramos. Es importante que no quede ninguna punta de palillo sin gominola, es decir, una arista debe terminar siempre en un vértice. Por ejemplo:

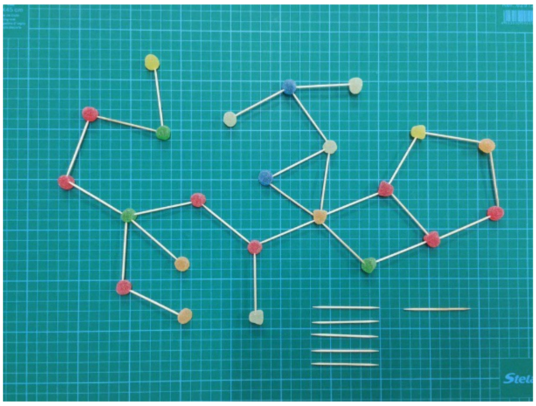


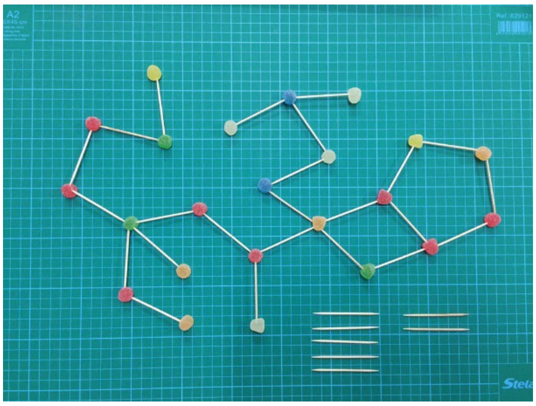
A continuación iremos quitando un palillo cada vez, de forma que después de algunos pasos lleguemos a un árbol. Para conseguirlo cada vez que quitemos una arista buscaremos abrir uno de los ciclos que aparecen en el grafo, conectando esa región con la región exterior, con cuidado de no desconectar el grafo.

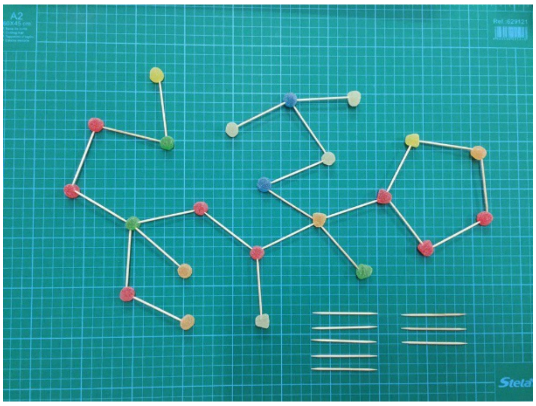





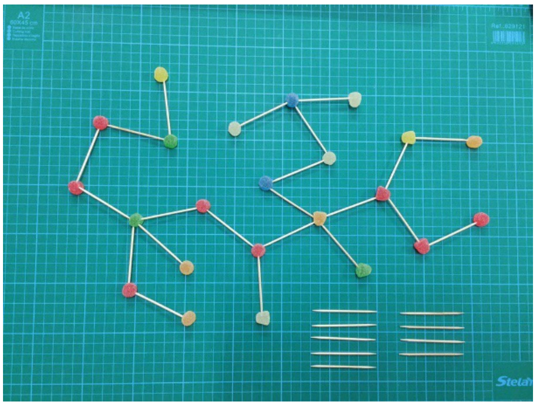
Por ejemplo, el palillo que señalamos no podríamos quitarlo porque dejaría el grafo inconexo. Tendríamos por un lado una parte del grafo y por otro, totalmente desconectada, la otra parte del grafo.









Continuamos quitando palillos, y con ello abriendo regiones hasta llegar a este punto, donde no queda ningún ciclo y, además, si quitáramos cualquier palillo más desconectaríamos el grafo. ¡Hemos acabado!

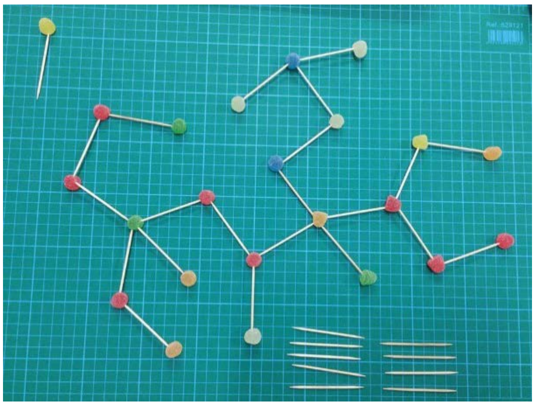
Con este proceso acabamos de ver que:

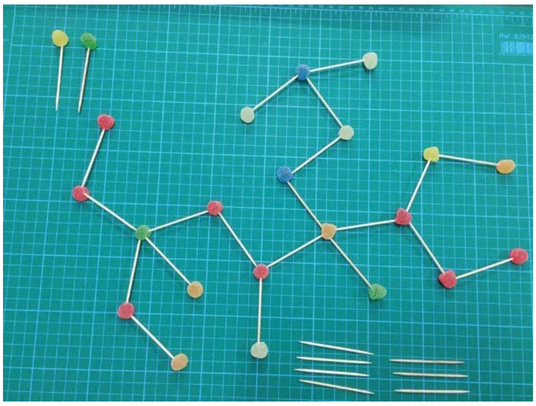
- Parece que se puede convertir cualquier grafo conexo en un árbol solo quitando aristas.
- Cada vez que quito una arista, elimino a la vez una región. Por tanto, en cada paso estaríamos restando una unidad de cada lado de la igualdad en la fórmula de Euler C+V=A+2.

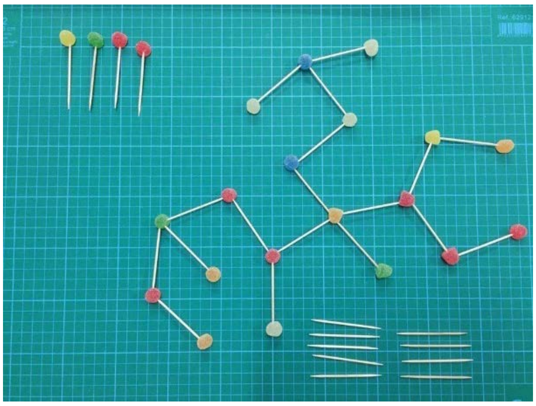
Entonces, si el árbol final cumpliera la fórmula de Euler, el grafo inicial también la cumpliría.

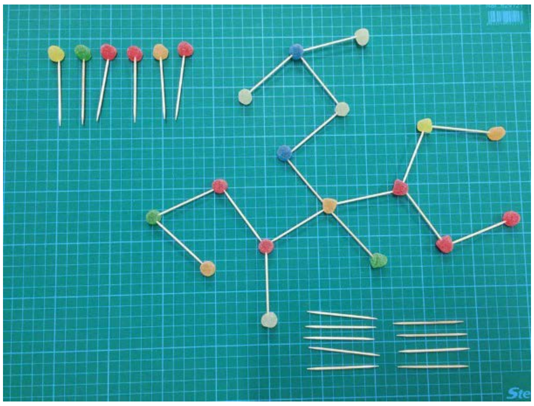
Por tanto, tenemos que ver que cualquier árbol cumple la fórmula de Euler. Como en un árbol solo existe una región, la que rodea al grafo, esta fórmula será 1+V=A+2 → V=A+1

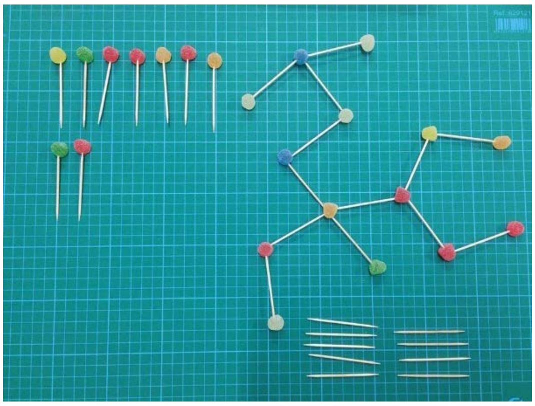
Para comprobarlo, quitaremos una gominola unida a un palillo cada vez, es decir, una arista y un vértice en cada paso.

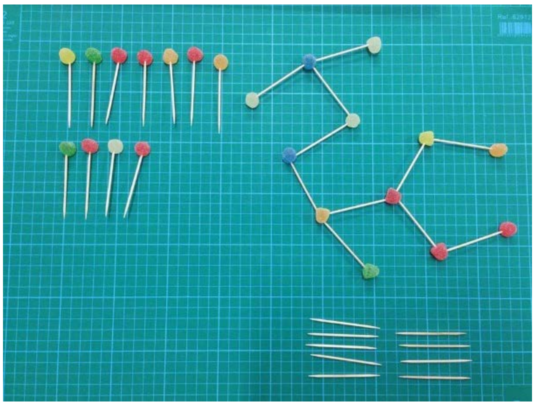


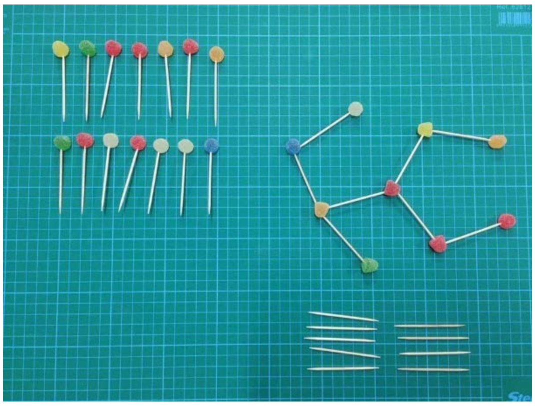


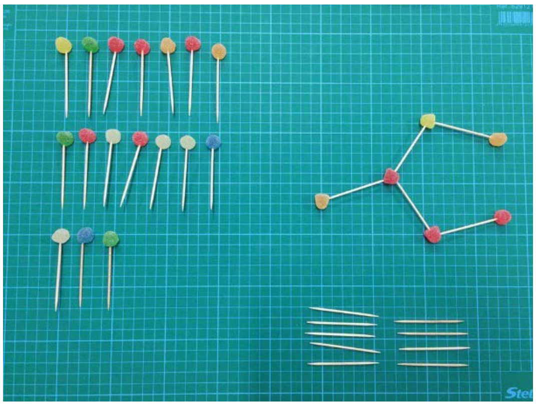


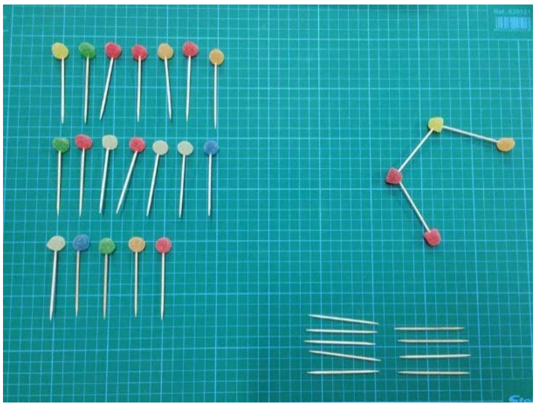
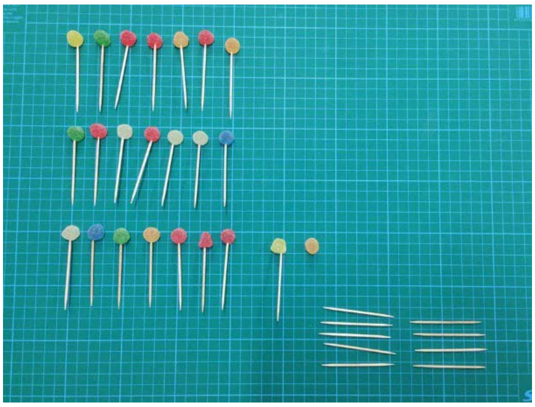










Al final del proceso quedará una gominola aislada, la del extremo final de nuestro recorrido. Como cada uno del resto de vértices han quedado asignados a una aarista, podemos garantizar que hay el mismo número, y por tanto:

VÉRTICES = ARISTAS + 1.