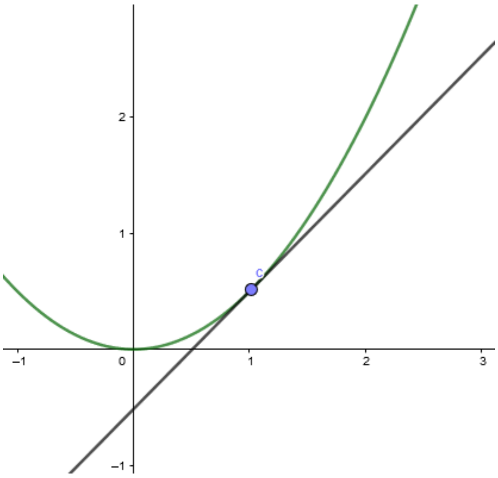
CAPÍTULO 3: NEWTON

Newton: derivadas, integrales y sistemas dinámicos

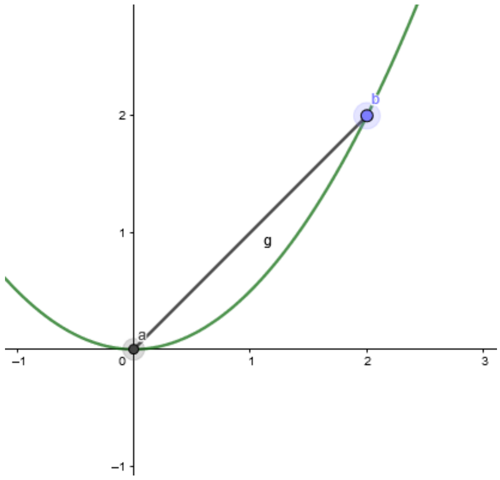
Como hemos podido ver en el video, Newton consiguió calcular la recta tangente a una curva en un punto y, con ello, creó nada más y nada menos que el cálculo diferencial. Introdujo dos nuevas operaciones matemáticas, la *derivada* y la *integral*, que permitirían estudiar el funcionamiento de una función: pendiente, crecimiento, áreas y volúmenes...

Pero, ¿qué es la *derivada?* Geométricamente representa la pendiente de la recta tangente a una función en un punto. Gráficamente es parecida a la *tasa de variación media*, que también permite estudiar la pendiente de la recta que pasa por dos puntos de una curva. Si f es la función de la curva, y f(a) y f(b) dos puntos de la misma, se define de la siguiente manera:

$$TVM = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Representación derivada en punto c



Representación TVM en intervalo [a,b]

La derivada ofrece también información de la tasa de variación, pero en vez de la media en toda la curva, de un instante concreto. Partiendo de la TVM, si hacemos cada vez más pequeño el intervalo [a,b], hasta casi convertirlo en un punto, nos aproximamos a la derivada en ese punto.

Tanto la derivada como la tasa de variación media representan la pendiente de una función y por tanto **nos sirven para estudiar su crecimiento**. Estudiando el valor de esta pendiente podemos saber en qué intervalos crece y en cuáles decrece la función.

Propuesta de actividad manipulativa

Estas herramientas introducidas por Newton son muy útiles a la hora de estudiar sistemas dinámicos, es decir, aquellos cuyas magnitudes (posición, velocidad, fuerza...) evolucionan a lo largo del tiempo.

La siguiente actividad consiste en simular el comportamiento dinámico de una población de conejos y una de zorros. En ella, estudiaremos el crecimiento o decrecimiento del número de cada una de las especies con el paso del tiempo y lo representaremos en una gráfica, con el fin de poder estudiar cómo varía.

En este ejemplo se utilizarán unas funciones simples que no representan un caso real de especies en nuestro ecosistema, sino una situación en la que las poblaciones sólo crecen.

Las condiciones del ecosistema son las siguientes:

De acuerdo a las condiciones concretas del hábitat nuestros animales se reproducirán de una forma determinada. Además, se introducirá también la alimentación de los zorros (de los conejos no se especifica nada porque se alimentan de hierba, que consideraremos que nunca se agota).

- Cada mes, nacen 2 zorros más.
- El número de conejos, que tienen una reproducción mayor, se duplica cada mes.
- Después de los pasos anteriores, que llamaremos fase de reproducción, cada zorro se comerá un conejo.

Podemos realizar el experimento con judías blancas (que representen a los conejos) y judías pintas (que representen a los zorros). Así, cada mes añadiremos dos judías pintas a la población de zorros, y duplicaremos las judías blancas, quitando después tantas judías blancas como pintas haya.

Paralelamente se realizará la toma de datos. Con el paso de cada mes, después de haber realizado el ajuste en las poblaciones con las judías, se procederá al recuento de especies, para incorporarlas en una tabla. En esta tabla deberá aparecer la cantidad de zorros y conejos al final de cada mes.

Una vez que tenemos la toma de datos de un año completo, es decir, después de repetir doce veces el ciclo de ajuste de poblaciones que se explicó arriba, elaboraremos una gráfica. En esta gráfica aparecerán dos curvas superpuestas, una de zorros y una de conejos, que permiten ver la diferencia de evolución de cada una de las poblaciones.

Finalmente se estudiarán estas funciones. En concreto, se calculará la tasa de variación media de diferentes intervalos de tiempo, y se observará cómo y en qué momentos crece cada una de ellas. Deberemos formular a los alumnos preguntas del estilo de:

- ¿Cuál ha sido la tasa de variación media general, entre enero y diciembre de cada especie?
- ¿Cuál ha sido la tasa de variación media en los tres primeros meses? ¿coincide con la general? Hacer los cálculos para las dos especies.

- ¿La tasa de variación media de los tres primeros meses en los conejos coincide con la de los tres últimos? ¿Y en los zorros?
- ¿Qué población crece más deprisa, la de zorros o la de conejos?

Para hacer la actividad más interesante, se estudiarán tres casos diferentes, que dependen de la cantidad inicial de animales de nuestro ecosistema:

- CASO I: 2 zorros – 6 conejos

  Realizar el experimento completo y estudiar las preguntas planteadas anteriormente

- CASO II: 2 zorros – 5 conejos

  Antes de realizar el experimento, ¿qué sucederá al quitar un conejo en la cantidad inicial? Comparar estas intuiciones iniciales con los resultados obtenidos realizando el experimento y después de contestar las preguntas modelo que se contestaron para el caso I.

- CASO III: 2 zorros – 7 conejos

  Similarmente al caso anterior, antes de comenzar el experimento, ¿qué creéis que sucederá? ¿Qué ha pasado realmente?

Resultado:

La población de zorros sigue siempre un crecimiento lineal. Sin embargo la población de conejos varía en los tres casos distintos estudiados:

- En el primer caso, con una población inicial de 6 conejos, estos seguirían, al igual que los zorros, una función lineal. Esto quiere decir que ambos crecen con igual velocidad, dos nuevos miembros más cada mes.
- En el segundo caso, para una población inicial de 5 conejos, éstos empiezan a extinguirse pasado el quinto mes. Si se forman cantidades con las judías pronto se quedan a cero, por lo que los conejos desaparecerán. Y en realidad, teniendo en cuenta que desaparece el alimento de los zorros, estos también desaparecerían.
- Por último, si aumentamos la población inicial a 7 conejos, éstos seguirían una función exponencial y enseguida aumentarían su población desorbitadamente en comparación con los zorros. Pronto habrá que abandonar el experimento de las judías porque no tendremos suficientes para añadirlas al ecosistema.

Una buena forma de estudiar estos casos sería utilizar una tabla Excel.

Para ello haremos dos columnas, una para la cantidad de zorros y otra para la de los conejos. Si tenemos en la celda A3 los zorros iniciales, y en la celda B3 los conejos iniciales, las fórmulas utilizadas en la fila siguiente serán las siguientes:

	A	B
1	CASO I	
2	zorros	conejos
3	2	6
4	=A3+2	=B3*2-A4
4		

- Los zorros aumentan en dos cada mes: =A3+2
- Los conejos se duplican y luego se restan tantos como zorros haya: =B3*2-A4

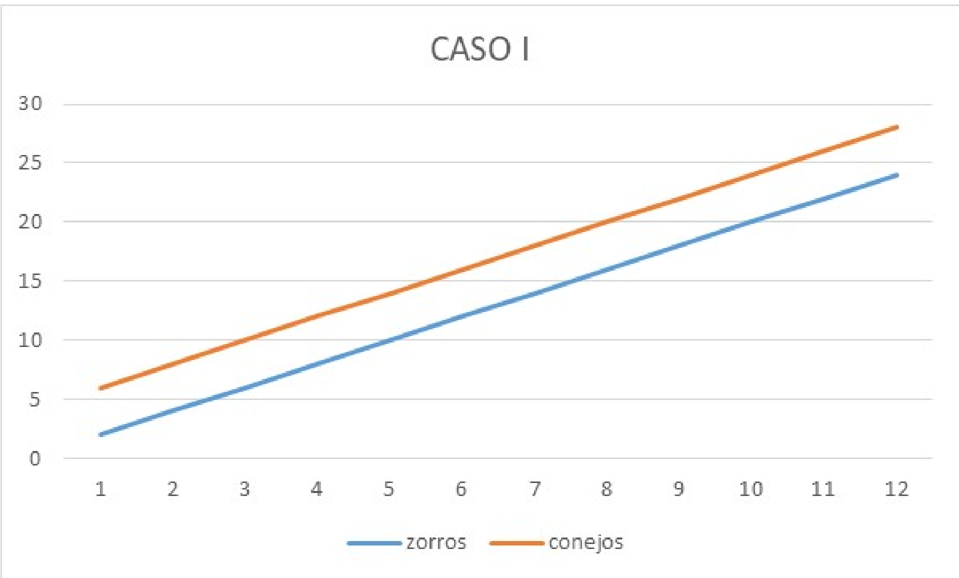
Podemos después arrastrar la fórmula a las filas siguientes, y Excel realizará los cálculos para cada paso en función de los valores de la fila anterior.

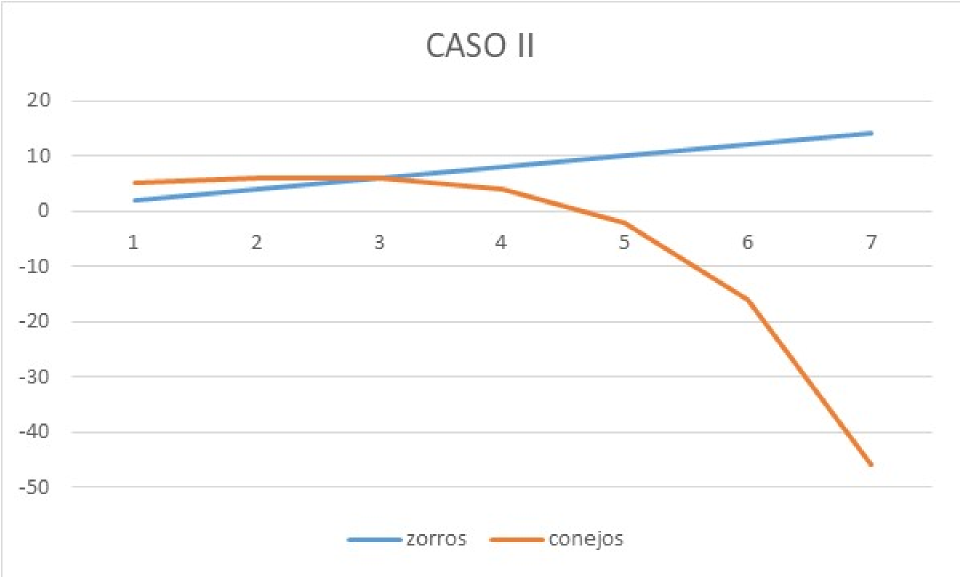
CASO I	
zorros	conejos
2	6
4	8
6	10
8	12
10	14
12	16
14	18
16	20
18	22
20	24
22	26
24	28

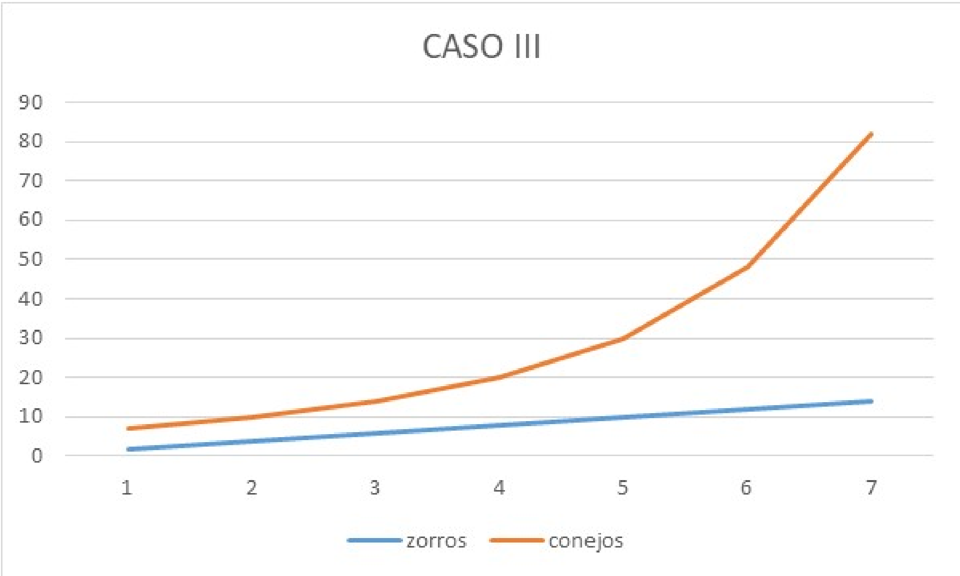
CASO II	
zorros	conejos
2	5
4	6
6	6
8	4
10	-2
12	-16
14	-46
16	-108
18	-234
20	-488
22	-998
24	-2020

CASO III	
zorros	conejos
2	7
4	10
6	14
8	20
10	30
12	48
14	82
16	148
18	278
20	536
22	1050
24	2076

En estas tablas, realizadas con Excel, vemos como los conejos en el caso II descienden de forma muy rápida, hemos dejado valores negativos para poder observar la evolución de las gráficas, a pesar de que en un modelo real no podríamos tener poblaciones de conejos negativas.







Si calculamos la Tasa de Variación Media de cada uno de los casos, vemos como en las funciones lineales., las gráficas representadas por líneas rectas, siempre es creciente con igual tasa de variación media (o derivada constante), de valor 2.

Sin embargo, en las funciones exponenciales, aquellas que representan curvas crecientes o decrecientes, depende de cuánto tiempo ha pasado desde el inicio del ecosistema. A mayor tiempo, mayor Tasa de Variación Media, y mayor crecimiento. Así mismo, en los casos en que la población de conejos empieza a decrecer puede observarse que el valor de la Tasa de Variación Media es negativo.

En la naturaleza hay muchos ejemplos en los que las poblaciones se rigen por modelos de este estilo. En matemáticas las ecuaciones que definen estos modelos se llaman *ecuaciones diferenciales*, en las que aparecen, además de las operaciones habituales, *derivadas* de las variables. En estos modelos el crecimiento de una población depende de la cantidad de miembros de la población y también de la tasa de variación instantánea de dicha población, es decir, la *derivada*.

Conclusiones:

En este ejemplo puede observarse como una pequeña variación de la población inicial de las dos especies modifica notablemente la evolución de cada una de ellas. Este tipo de sistemas dinámicos, tan sensibles a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales, son los que se estudian en la Teoría del Caos. Esta teoría es ampliamente conocida por la idea del efecto mariposa, que señala que el simple aleteo de una mariposa puede ser la causa de un huracán en la otra parte del mundo.

Modelo de Lodka-Volterra

El ejemplo estudiado era un caso ficticio, en el que, como se vio, en muchos casos la población de conejos y zorros crece ilimitadamente. Obviamente este caso no podría darse en la realidad. Sí existe, sin embargo, un modelo de sistema dinámico de depredador-presa, concebido por dos matemáticos, Alfred J. Lotka y Vito Volterra, entre 1925 y 1926, y basado en ecuaciones diferenciales. Lo curioso de estos modelos es que siempre concluyen en una gráfica periódica, es decir, que las poblaciones aumentan y disminuyen alternativamente a lo largo del tiempo.

Veamos un ejemplo. Queremos estudiar la población de zorros y conejos. Los zorros se alimentan de conejos y los conejos de hierba, y de nuevo consideramos que la hierba nunca se agota.

- Cuando hay muchos conejos, la población de zorros aumenta porque el alimento es abundante.
- Sin embargo, cuando hay demasiados zorros, la población de conejos empezará a disminuir, ya que a mayor cantidad de zorros, mayor cantidad de comida (conejos) necesitan para vivir.
- Así llegará un punto en que los zorros no tendrán comida suficiente, y su población disminuirá.
- Este hecho favorecerá de nuevo al crecimiento de la población de conejos, llegando de nuevo al inicio de nuestro problema.

Como puede observarse se producen ciclos de crecimiento y decrecimiento de ambas poblaciones, dando lugar al comportamiento periódico mencionado.